EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta …*.065**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine distanța dintre punctele $A(-2,5)$ și $B(1,1)$.

(4p) **b)** Să se arate că punctele $M(1,1), N(2,3), P(4,7)$ sunt coliniare.

(4p) **c)** Să se determine $a,b\in \mathbf{R}$ dacă $1+(a+b)\cdot i=a+3\cdot i$, unde $i^2=-1$.

(4p) **d)** Să se determine $\sin(\hat{A})$ dacă în triunghiul ABC avem $5\cdot m(\hat{A})=m(\hat{B})+m(\hat{C})$.

(2p) **e)** Să se dea un exemplu de numere $x,y\in \mathbf{R}, x\neq y$ pentru care $\sin x=\sin y$.

(2p) **f)** Să se demonstreze că vectorii $\vec{u}=-2\vec{i}+3\vec{j}$ și $\vec{v}=3\vec{i}+2\vec{j}$ sunt perpendiculari.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pe $\mathbf{R}$ se definește legea de compoziție "$*$" prin $x*y=\frac{2x+3y}{2}, \forall x,y\in \mathbf{R}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $\frac{3}{2}*\frac{2}{3}$.

(3p) **b)** Să se determine $a\in \mathbf{R}$ pentru care $x*a=x$, $\forall x\in \mathbf{R}$.

(3p) **c)** Să se determine $c\in \mathbf{R}$ pentru care $(a*b)*c=a*(b*c), \forall a,b\in \mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se determine $x\in \mathbf{R}$ pentru care $(2^x)*(2^x)=10$.

(3p) **e)** Să se determine $y\in(0,\infty)$ pentru care $(\log_2 y)*(\log_2 y)=10$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=|2x-2|$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f(-4)\cdot f(-3)\cdot f(-2)\cdot\ldots\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)$.

(3p) **b)** Să se calculeze $f'(-2)+f'(2)$.

(3p) **c)** Să se rezolve ecuația $f(x)=4$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f(n)}{2n}\right)^{\frac{2}{n}}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_1^2 f(x)dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea G formată din toate matricele cu 3 linii şi 3 coloane şi care au toate elementele din mulțimea $M = \{-2,-1,0,1,2\}$, precum şi mulțimea

$$H = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \middle| x \in M \right\}.$$

(4p) **a)** Să se calculeze determinantul matricei $A(2) \in H$ şi să se determine rangul acesteia.

(4p) **b)** Să se determine $\left(A(1)\right)^n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **c)** Să se determine numărul elementelor mulțimii *H*.

(2p) **d)** Să se arate că există $A(x), A(y) \in H, x \neq y$ astfel încât $A(x) \cdot A(y) \in H$.

(2p) **e)** Să se arate că pentru orice $A(x) \in H$ numărul $\det A(x)$ este par.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $A \in G$ şi $\det(A)$ este un număr întreg impar, atunci cel puțin trei dintre elementele matricei *A* sunt egale cu 1 sau -1.

(2p) **g)** Să se arate că dacă $A \in G$ şi $\det(A)$ este un număr întreg impar, atunci cel puțin unul dintre elementele matricei *A* este număr par.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f:(0,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ şi se defineşte şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ prin $a_n = f(1) + f(2) + ... + f(n)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.

(4p) **b)** Să se calculeze $f'(x)$ şi să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0,\infty)$.

(4p) **c)** Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției *f*, axa *Ox* şi dreptele de ecuații $x = 1$ şi $x = 2$.

(2p) **d)** Să se arate că $\frac{25}{144} < \frac{1}{e^2} + \frac{1}{\pi^2} < \frac{52}{144}$.

(2p) **e)** Să se arate că $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, $\forall k \geq 2$.

(2p) **f)** Folosind eventual punctul **e)**, să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

(2p) **g)** Ştiind că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ are limita $\frac{\pi^2}{6}$, să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... + \frac{1}{(2n-1)^2}\right).$$